Problemas de Entrenamiento

Carlomagno

1 de noviembre de 2013

1. Encuentre el menor entero positivo m tal que para todo primo $p > 3$ se cumple que 105 es divisor de $9^{p^2} - 29^p + m$.

   [China Western 2012]

2. Sean x, y, z enteros tales que $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$. Demuestre que 27 divide a $x + y + z$.

   [Rusia 93]

3. Las longitudes de los lados de un triángulo son primos. Demuestre que el área del triángulo no puede ser entero.

   [Rusia 93]

4. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_7$ reales no necesariamente distintos tales que $1 < a_i < 13$ para todo i. Demuestre que se puede escoger tres ellos los cuales pueden ser las longitudes de un triángulo.

5. Demuestre que en la progresión aritmética cuyo primer término es 1 y la razón es 729, existen infinitas potencias de 10.

   [Rusia 96]

6. ¿Cuál es el menor múltiplo de 99, cuyos dígitos suman 99 y que empieza y termina con 99?

   [Rioplatense]

7. Un número ***divi*** es aquel que es divisible por el número de divisores positivos que tiene. Por ejemplo, el 8 es ***divi*** porque tiene 4 divisores y el 4 divide al 8. A los números ***divi*** que son cuadrados perfectos se los llama ***dividivi***. Encuentra todos los números ***dividivi*** menores que 1997.

8. En un grupo de personas, se sabe que cada una de ellas conoce exactamente a 101 personas del grupo.

   (a)¿Es posible que haya exactamente 1997 personas en el grupo?

   (b)¿Es posible que haya exactamente 1998 personas en el grupo?

   Aclaración: se supone que si A conoce a B, entonces B conoce a A.

9. Demuestre que entre nueve enteros cualesquiera se pueden escoger cuatro de ellos a, b, c, d tales que: 20 divide a $a + b - c - d$.