Problemas de Entrenamiento

Carlomagno

13 de agosto de 2013

1. Determine todos los polinomios $P(x, y)$ con coeficientes reales tales que:

$$P(x+y, x-y) = 2P(x, y); \forall x, y \in R$$

2. Determina todas las funciones $f : N \to N$ tales que $\forall$ m y n se cumple:

$$f(m) + f(n) | m + n$$

3. Sea un triángulo rectángulo ABC con $\measuredangle A = 90°$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior de $\measuredangle A$ y BC, además sea I_a el excentro relativo a A del triángulo ABC. Demuestra que:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

4. Sean $n, p > 1$ enteros positivos y p primo. Se sabe que $n|p-1$ y $p|n^3-1$. Demuestre que $4p-3$ es cuadrado perfecto.

5. Definimos la secuencia de los enteros a_n como $a_0 = 1, a_1 = -1, a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}, \forall n \geq 2$. Demuestra $2011|a_{2012} - 2010$.

6. Sea $P(x)$ es un polinomio no nulo con coeficientes enteros. Demuestra que existen infinitos primos q tales que para algún entero positivo n, se cumple que $q|2^n + P(n)$.